10 FUNCIONES ELEMENTALES

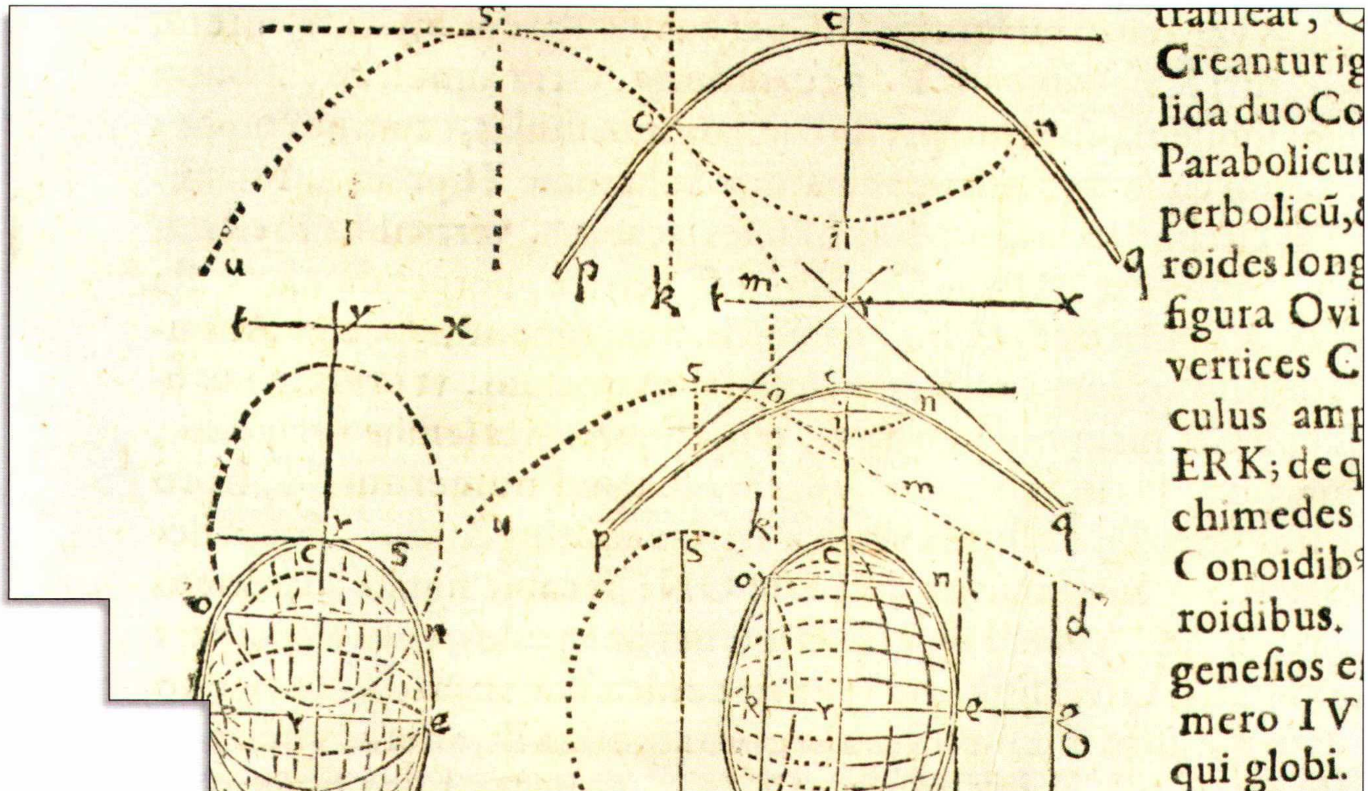
Las distintas ciencias conocen, desde hace tiempo, leyes que describen relaciones entre magnitudes, de tal manera que conociendo el valor de algunas de ellas se obtienen, inequívocamente, el valor de las otras. Fueron este tipo de relaciones las que sirvieron de origen al **concepto de función**. Así, la primera idea de función es la de una fórmula que relaciona algebraicamente varias magnitudes.

Todo nuevo concepto da lugar a un nuevo simbolismo. Del mismo modo que el álgebra nació al pasar de números concretos a relaciones entre números cualesquiera descritos por letras, en el análisis se pasó de fórmulas concretas a fórmulas generales.

La representación gráfica mediante diagramas cartesianos (siglo XVII) permitió la visualización de las funciones. De este modo, el concepto de función se generaliza a cualquier relación numérica que responda a una gráfica sobre unos ejes coordenados.

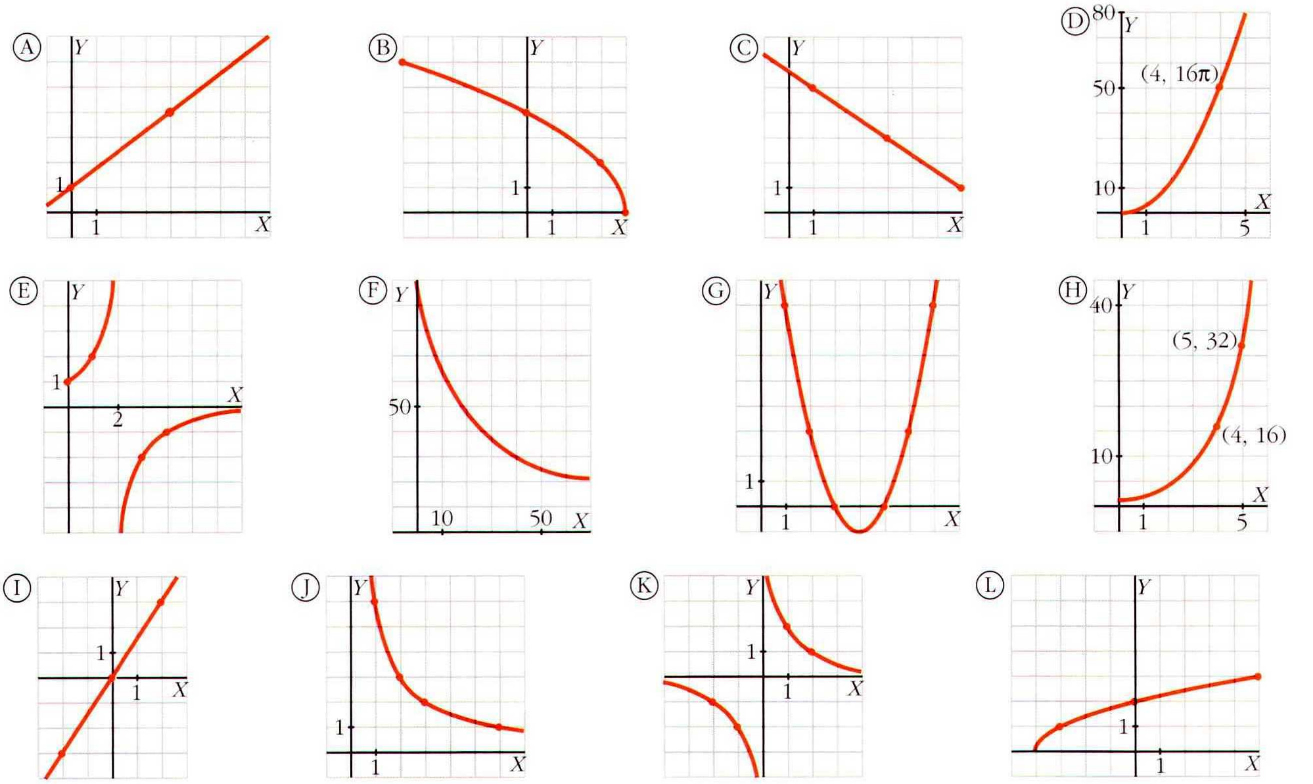
Fórmula y gráfica, dos versiones del concepto de función que ya utilizó Euler a mediados del siglo XVIII. También fue él quien empezó a usar la expresión $f(x)$ para indicar el valor de la función f asociado al número x. Se puede decir que con Euler se asienta el concepto matemático de función.

Página del tratado "Nova Stereometrica" (1615) de Johannes Kepler



REFLEXIONA Y RESUELVE

- Asocia a cada una de las siguientes gráficas una ecuación de las de abajo:



LINEALES:	L_1: $y = \frac{3}{2}x$	L_2: $y = -\frac{2}{3}(x - 1) + 5$	L_3: $3x + 2y = 0$	L_4: $y = \frac{3}{4}x + 1$
CUADRÁTICAS:	C_1: $y = x^2 - 8x + 15$	C_2: $y = (x + 3)(x + 5)$	C_3: $y = x^2,\ x > 0$	C_4: $y = \pi x^2,\ x > 0$
DE PROPORCIONALIDAD INVERSA:	$P.I._1$: $y = \frac{1}{x}$	$P.I._2$: $y = \frac{2}{2 - x}$	$P.I._3$: $y = \frac{2}{x}$	$P.I._4$: $y = \frac{6}{x},\ x > 0$
RADICALES:	R_1: $y = \sqrt{2x + 4}$	R_2: $y = \sqrt{x + 4}$	R_3: $y = 2\sqrt{4 - x}$	
EXPONENCIALES:	E_1: $y = 2^x$	E_2: $y = 0{,}5^x$	E_3: $y = 20 + 80 \cdot 0{,}95^x$	

- Cada uno de los siguientes enunciados corresponde a una gráfica de las de arriba. Identifícala.

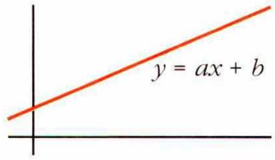
1. Superficie (cm^2) de un círculo. Radio en centímetros.
2. Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.
3. Temperatura de un cazo de agua que se deja enfriar desde 100 °C. Tiempo en minutos.
4. Número de amebas que se duplican cada hora. Se empieza con una.
5. Longitud de un muelle (dm). Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.
6. Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de rectángulos cuya superficie es 6 cm^2.

10.1 LAS FUNCIONES DESCRIBEN FENÓMENOS REALES

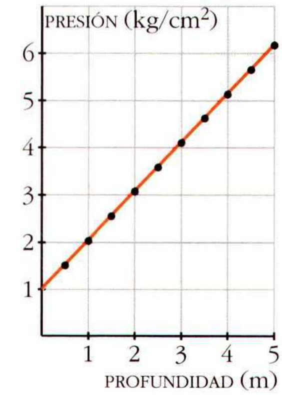
Las funciones describen fenómenos cotidianos, económicos, psicológicos, científicos... Tales funciones se obtienen experimentalmente, mediante observación. Después, se idealizan y sirven de modelos para las grandes familias de funciones que ya conoces de cursos anteriores. Veamos algunas de ellas.

Funciones lineales

Las funciones lineales se describen con ecuaciones de primer grado, $y = ax + b$, y se representan mediante rectas.



Ejemplos:



- Medimos la *presión* a distintas *profundidades* en el mar y obtenemos los siguientes resultados:

Profundidad (en m)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Presión (kg/cm^2)	1,51	2,03	2,55	3,07	3,58	4,10	4,62	5,13	5,65	6,17

Estos datos responden a la ecuación:

$$\textit{Presión} = 1 + 1{,}033 \cdot \textit{Profundidad}$$

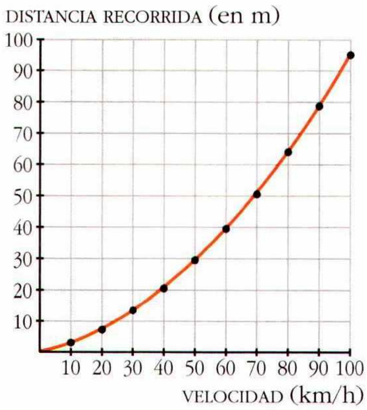
- La *longitud* l (en centímetros) de un cierto muelle del que se cuelgan pesas de *masa* M (en gramos) viene dada por la ecuación:

$$l = 2 + 0{,}29M \qquad 0 \le M \le 50$$

Funciones cuadráticas

Ecuación: $y = ax^2 + bx + c$. Se representan mediante parábolas.

Ejemplos:



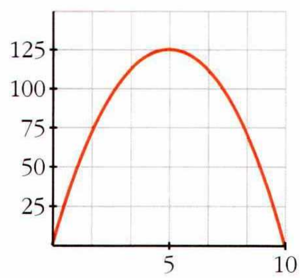
- La *distancia recorrida* por un coche desde que el conductor aprecia el peligro hasta que el coche para por completo es función de la *velocidad* que lleva el coche en ese instante. He aquí algunos datos obtenidos experimentalmente:

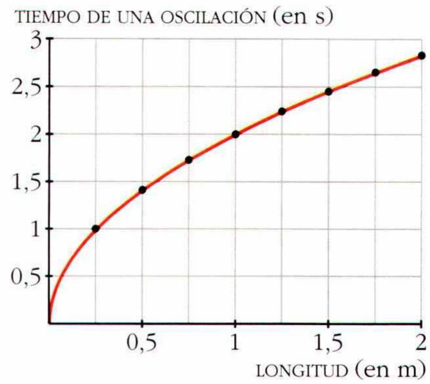
Velocidad (km/h)	v	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Distancia recorrida (en m)	d	3	7	13,5	20,5	29,5	39,5	50,5	64	79	95

Estos datos responden a la ecuación: $d = 0{,}0074v^2 + 0{,}21v$

- La *altura* a (en metros) a la que se encuentra un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 180 km/h es, en función del *tiempo* t (en segundos), la siguiente:

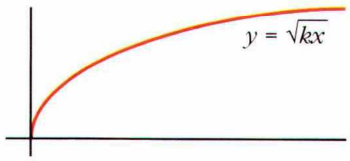
$$a = 50t - 5t^2 \qquad 0 \le t \le 10$$





Funciones raíz

Las funciones $y = \sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje X.



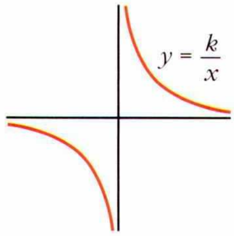
Ejemplo:

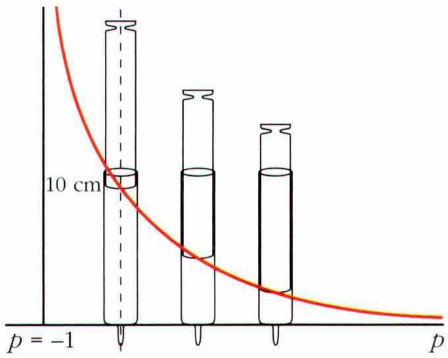
- El *periodo* de un péndulo T (tiempo de una oscilación) es función de su *longitud* l (en metros). Su ecuación es: $T = 2\sqrt{l}$

  Se puede obtener aproximadamente a partir de valores obtenidos experimentalmente. La gráfica está en el margen.

Funciones de proporcionalidad inversa

Su expresión analítica es $y = \dfrac{k}{x}$. Su representación gráfica son hipérbolas con las asíntotas paralelas a los ejes coordenados.





Ejemplos:

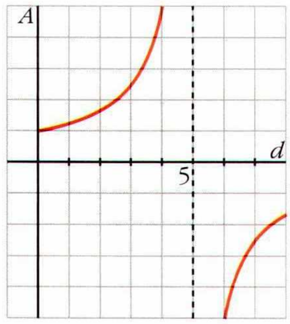
- Una jeringa de 10 cm de largo se llena de aire y se tapa el orificio de salida. Si presionamos el émbolo este entra y disminuye la columna de aire. La relación entre la *presión* p (en atmósferas) que ejercemos y la *longitud* l (en centímetros) de la columna de aire viene dada por una serie de valores que responden a la expresión:

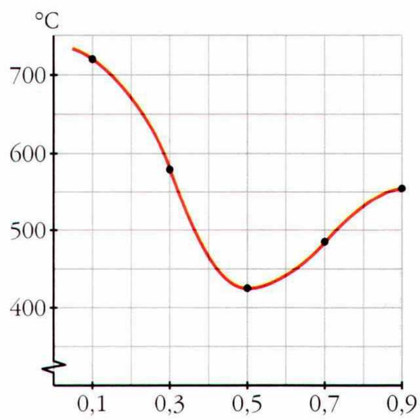
$$l = \frac{10}{p+1}$$

- El *aumento* A producido por una cierta lupa viene dado por la ecuación:

$$A = \frac{5}{5-d}$$

  donde d es la *distancia* (en decímetros) a la que se sitúa el objeto.





Otros tipos de funciones

Las funciones **exponenciales** y **logarítmicas** se estudian con detalle en las últimas páginas de esta unidad.

Hay **funciones que no siguen un modelo fijo**. Por ejemplo:

- El punto de fusión de una aleación depende de las proporciones en que intervienen cada uno de sus componentes. Para aleaciones de dos ciertos componentes, A y B, se han obtenido los siguientes datos:

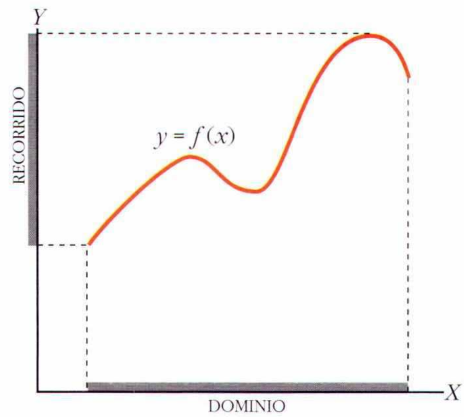
Proporción de *A*	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
Temperatura de fusión (°C) de la aleación	720	580	425	485	555

  La gráfica de la izquierda, en rojo, se ha trazado uniendo puntos obtenidos experimentalmente. Carece de expresión analítica.

10.2 CONCEPTO DE FUNCIÓN

RECUERDA

Las funciones que habitualmente utilizamos son **funciones reales de variable real**.



f es una **función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$** si a cada número real, $x \in Dom$, le hace corresponder otro número real, $f(x)$:

$$Dom \subset \mathbb{R} \qquad Dom \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

El conjunto Dom de los valores que puede tomar la variable independiente, x, se llama **dominio de definición de la función**.

El conjunto de los valores que toma la función se llama **recorrido**.

Destaquemos que a cada valor de $x \in Dom$, la función le asigna un único valor $f(x)$:

$$\boldsymbol{f(x)} \textbf{ es único para cada } \boldsymbol{x \in Dom}$$

Puesto que tanto la variable x como la función $f(x)$ toman valores reales, estas funciones se llaman **funciones reales de variable real**.

Razones por las que el dominio de definición puede restringirse

- Imposibilidad de realizar alguna operación con ciertos valores de x:
  — Denominadores que se anulan.
  — Raíces cuadradas de números negativos.
- Contexto real del que se ha extraído la función.
- Por voluntad de quien propone la función.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *¿Cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones?*

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = \sqrt{x-2}$

c) El volumen de un cubo viene dado por $V = l^3$.

d) $y = 2x + 5, \ x \in [1, 4]$

a) La función no está definida en $x = -3$ (el denominador sería 0).
Su dominio de definición es $Dom = \mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

b) La función no está definida para valores de x menores que 2, pues el radicando sería negativo.
Su dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

c) $l > 0$, pues de otra manera no hay cubo. Por tanto, $Dom = (0, +\infty)$.

d) $Dom = [1, 4]$ por voluntad de quien puso el enunciado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ b) $y = \sqrt{x - 1}$ c) $y = \sqrt{1 - x}$ d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ g) $y = x^3 - 2x + 3$ h) $y = \dfrac{1}{x}$

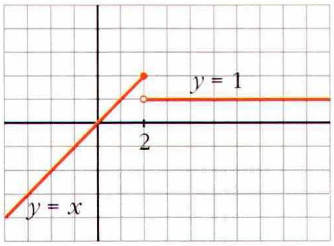
i) $y = \dfrac{1}{x^2}$ j) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ k) El área de un cuadrado de lado variable, l, es $A = l^2$.

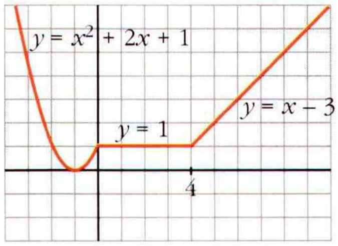
10.3 FUNCIONES DEFINIDAS "A TROZOS"

Las expresiones analíticas de las siguientes funciones son muy peculiares:

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Requieren de varias "fórmulas", cada una de las cuales rige el comportamiento de la función en un cierto tramo.

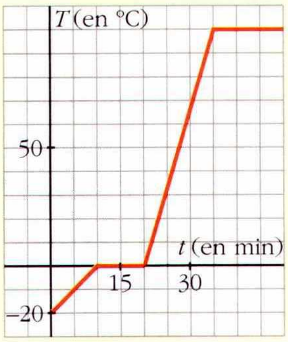




Sus representaciones gráficas son fáciles si sabemos representar cada uno de los tramos y se presta atención a su comportamiento en los puntos de empalme.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.



En esta gráfica se describe la temperatura, T, del agua que, siendo hielo, se echa en una cazuela y se pone al fuego hasta que lleva un rato hirviendo. Escribir la expresión analítica de T en función del tiempo, t.

- Primer tramo: pertenece a una recta que pasa por $(0, -20)$ y $(10, 0)$.

  Su pendiente es: $\dfrac{0-(-20)}{10-0} = \dfrac{20}{10} = 2$ (El hielo aumenta su temperatura de –20° a 0°)

  Ecuación: $y = 2(x-0) - 20 \rightarrow y = 2x - 20$

- Segundo tramo: $y = 0$ (El hielo se descongela).

- Tercer tramo: pertenece a una recta que pasa por $(20, 0)$ y $(35, 100)$.

  Ecuación: $y = \dfrac{100}{15}(x - 20) \rightarrow y = \dfrac{20}{3}x - \dfrac{400}{3}$ (El agua sube su temperatura de 0° a 100°).

- Cuarto tramo: $y = 100$ (El agua hirviendo se mantiene a 100°).

  Si en lugar de x e y ponemos t (tiempo) y T (temperatura), su expresión analítica es:

$$T = f(t) = \begin{cases} 2t - 20 & 0 \le t \le 10 \\ 0 & 10 < t < 20 \\ \dfrac{20}{3}t - \dfrac{400}{3} & 20 \le t \le 35 \\ 100 & 35 < t \le 50 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1, & x \in [0, 3] \\ 4, & x \in (3, 7) \end{cases}$$

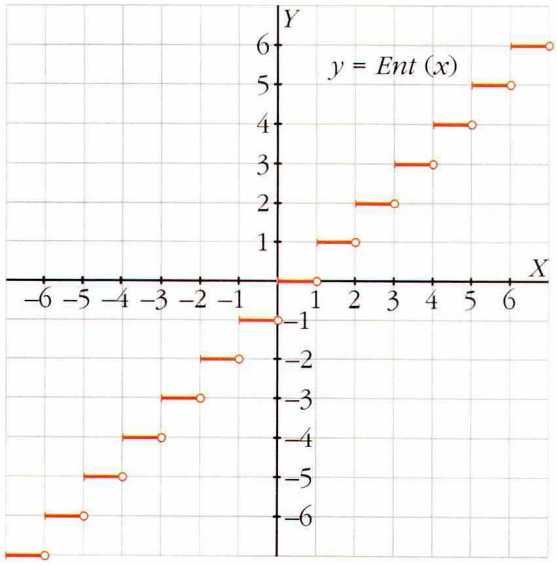
2. Haz la representación gráfica de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

10.4 DOS FUNCIONES INTERESANTES

Parte entera

Se llama **parte entera** de un número x al mayor número entero menor o igual a x. A partir de esto, definimos la **función parte entera de** x, $Ent(x)$, que hace corresponder a cada número x su parte entera.



PRACTICA

$Ent(7,5) = 7$

$Ent(-4) = -4$

$Ent(-5,3) = -6$ ¡atención!

Continúa:

$Ent(6,48) =$

$Ent(-3,9) =$

$Ent(-8) =$

$Ent(7) =$

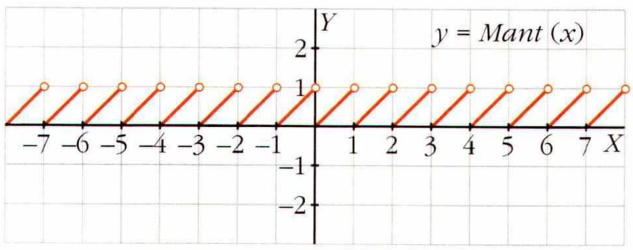
$Ent(-11,3) =$

Parte decimal

La **parte decimal** o **mantisa** de un número x es $Mant(x) = x - Ent(x)$. Por ejemplo:

$Mant(7,54) = 7,54 - 7 = 0,54 \qquad Mant(-7,54) = -7,54 - (-8) = 0,46$

A partir de esto, definimos la **función parte decimal de** x, $Mant(x)$, que hace corresponder a cada número x su parte decimal.



PRACTICA

$Mant(7,68) = 0,68$

$Mant(-8) = 0$

$Mant(-7,68) = 0,32$

Continúa:

$Mant(3,791) =$

$Mant(2) =$

$Mant(-6,94) =$

$Mant(-4,804) =$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa las siguientes funciones relacionadas con la función parte entera:

a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0,5)$

c) $y = Ent\left(\dfrac{x}{4}\right)$

d) $y = Ent(3x)$

2. Representa:

a) $y = Mant(x) - 0,5$

b) $y = |Mant(x) - 0,5|$

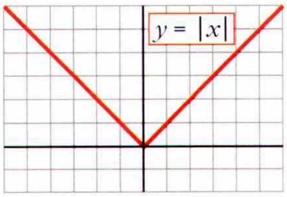
c) $y = 0,5 - |Mant(x) - 0,5|$

Comprueba que esta última significa la distancia de cada número al entero más próximo. Su gráfica tiene forma de sierra.

10.5 VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

Recordemos que el valor absoluto de un número a coincide con a si es positivo o nulo, o con su opuesto, si es negativo:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

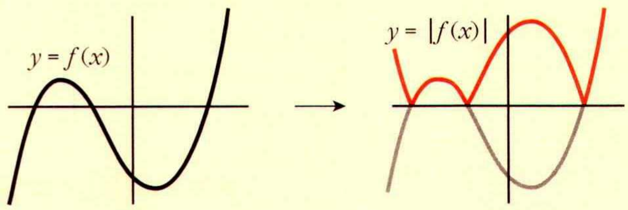


La función $y = |x|$ se define, en consecuencia, así:

$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En general, el **valor absoluto** de una función se define así:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{cuando } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{cuando } f(x) < 0 \end{cases}$$



EJERCICIOS RESUELTOS

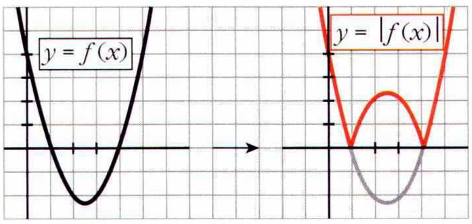
1. *Representar la siguiente función:*

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4|$$

Hallamos los puntos de corte de la función $y = x^2 - 5x + 4$ con el eje X:

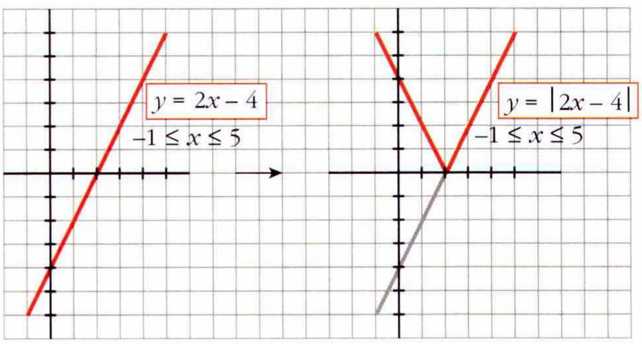
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Por tanto, entre 1 y 4 la gráfica sube sobre el eje X.



2. *Representar la siguiente función:*

$$y = |2x - 4|,\ x \in [-1, 5]$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa: $y = |-x^2 + 4x + 5|$

2. Representa gráficamente: $y = \left|\dfrac{x}{2} - 3\right|$

10.6 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FUNCIONES

Veamos cómo se representan, a partir de una función $y = f(x)$ conocida, otras funciones relacionadas con ella:

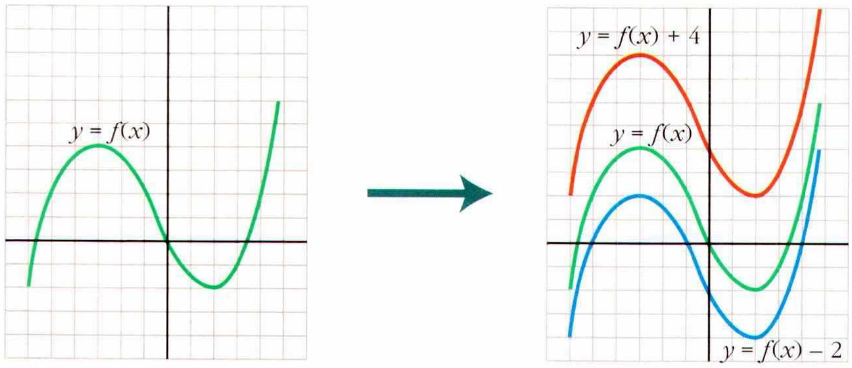
$y = f(x) + k$, $y = f(x) - k$, a partir de $y = f(x)$

TEN EN CUENTA

La k se le suma o se le resta a $f(x)$, es decir, al valor de la función.

Por tanto, **la ordenada** aumenta o disminuye k unidades.

Si k es un número positivo, la gráfica de $y = f(x) + k$ y la de $y = f(x) - k$ son como la de $y = f(x)$ desplazadas k unidades hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Por ejemplo:

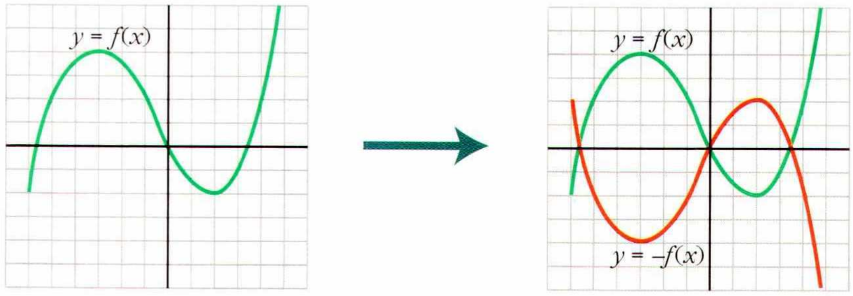


$y = -f(x)$, a partir de $y = f(x)$

TEN EN CUENTA

La función $f(x)$ cambia de signo. Por tanto, **la ordenada** cambia de signo: si está por encima del eje X pasa a estar hacia abajo, y viceversa.

La gráfica correspondiente a $y = -f(x)$ es la simétrica de la de $y = f(x)$ respecto del eje X. Por ejemplo:



EJERCICIOS RESUELTOS

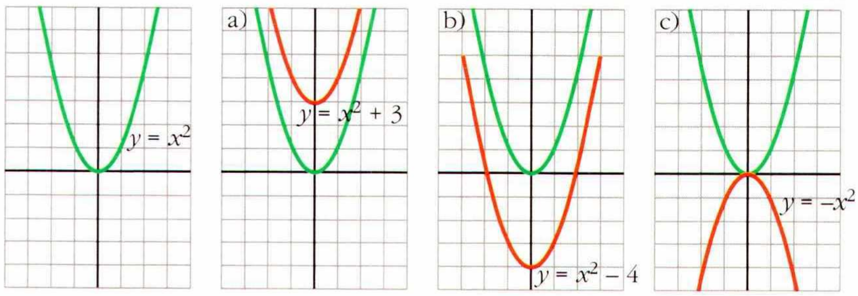
1. *Representar $y = x^2$.*

A partir de ella, representar:

a) $y = x^2 + 3$

b) $y = x^2 - 4$

c) $y = -x^2$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa $y = \frac{1}{4}x^2$. A partir de ella, representa:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 5$ b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

2. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, representa:

a) $y = -\frac{1}{4}x^2$ b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

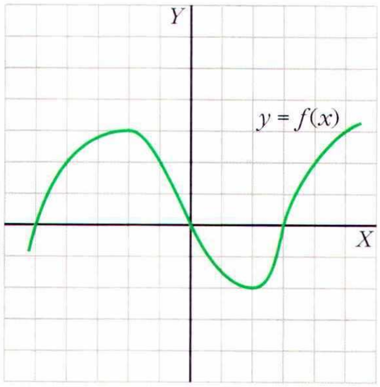
$y = kf(x)$, a partir de $y = f(x)$

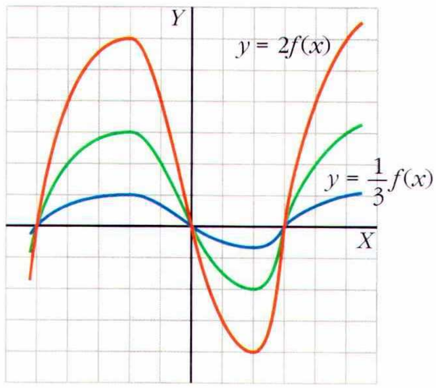
TEN EN CUENTA

La k se multiplica por $f(x)$, es decir, por el valor de la función. Por tanto, **la ordenada** de cada punto se multiplica por k.

La gráfica de $y = kf(x)$ se obtiene multiplicando por k las ordenadas de la gráfica de $y = f(x)$. Si k es positivo y mayor que 1, la gráfica "se estira". Si $0 < k < 1$, la gráfica "se achata".

Por ejemplo:





Si k es negativo, se obtiene la gráfica de $|k|f(x)$ y, después, se halla su simétrica respecto del eje X.

EJERCICIOS RESUELTOS

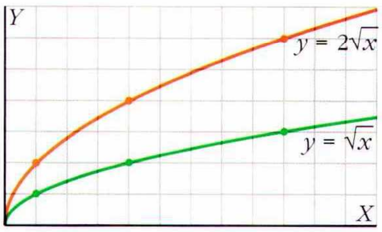
1. *Representar:*

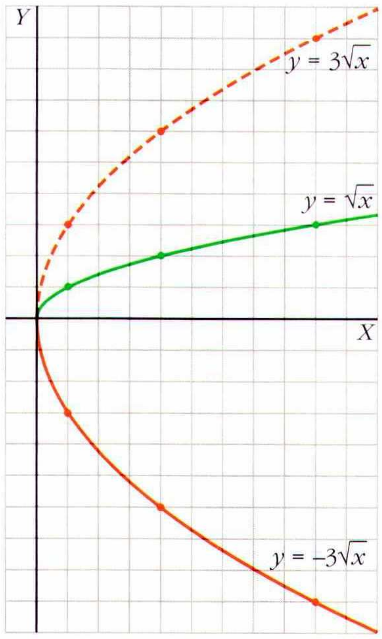
a) $y = 2\sqrt{x}$ *b)* $y = -3\sqrt{x}$

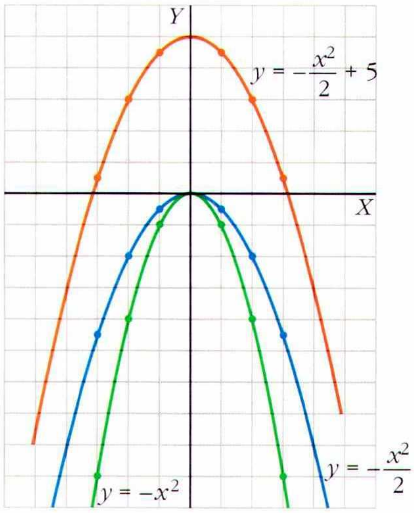
a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$

c) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 5$

a partir de $y = -x^2$

a) 

b) 

c) 

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Representa $y = x^2$. A partir de ella, representa:

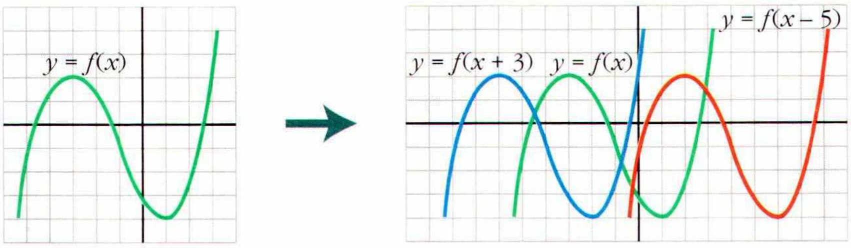
a) $y = \dfrac{x^2}{3}$ b) $y = -\dfrac{x^2}{3}$ c) $y = -\dfrac{x^2}{3} + 8$

4. Representa $y = 1/x$. A partir de ella, representa:

a) $y = \dfrac{2}{x}$ b) $y = -\dfrac{2}{x}$ c) $y = -\dfrac{2}{x} - 3$

$y = f(x - a)$, $y = f(x + a)$, a partir de $y = f(x)$

Si a es un número positivo, las gráficas de $y = f(x - a)$ e $y = f(x + a)$ son como las de $y = f(x)$ desplazadas a unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, respectivamente. Por ejemplo:



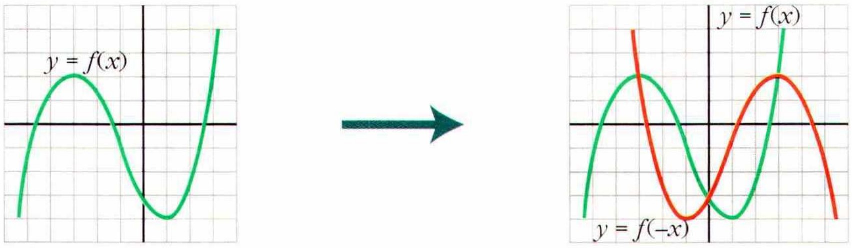
TEN EN CUENTA

Si (x_0, y_0) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces:

- $(x_0 + a, y_0)$ es el correspondiente punto de la gráfica de $x = f(x - a)$.
- $(x_0 - a, y_0)$ es el punto correspondiente de la gráfica de $y = f(x + a)$.
- $(-x_0, y_0)$ es el punto correspondiente de la gráfica de $y = f(-x)$.

$y = f(-x)$, a partir de $y = f(x)$

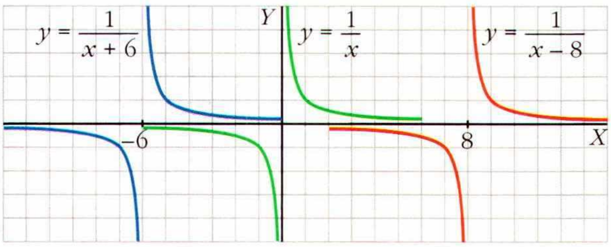
La gráfica de $y = f(-x)$ es simétrica a la de $y = f(x)$ respecto al eje Y.



EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Representar* $y = \frac{1}{x}$. *A partir de esta gráfica, representar estas otras:*

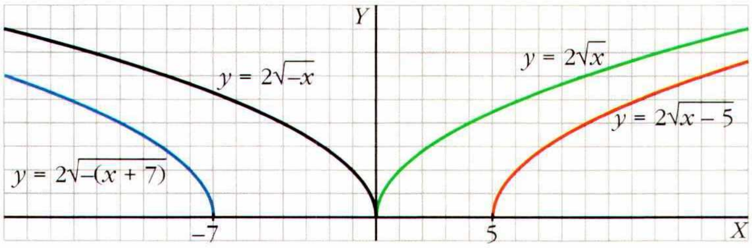
a) $y = \frac{1}{x - 8}$ *b)* $y = \frac{1}{x + 6}$



2. *Representar* $y = 2\sqrt{x}$. *A partir de esta gráfica, representar estas otras:*

a) $y = 2\sqrt{x - 5}$ *b)* $y = 2\sqrt{-x}$

c) $y = 2\sqrt{-(x + 7)}$



EJERCICIOS PROPUESTOS

5. Representa $y = -\frac{x^2}{2}$. A partir de esta gráfica, representa estas otras:

a) $y = \frac{-(x - 8)^2}{2}$ b) $y = \frac{-(x + 4)^2}{2}$

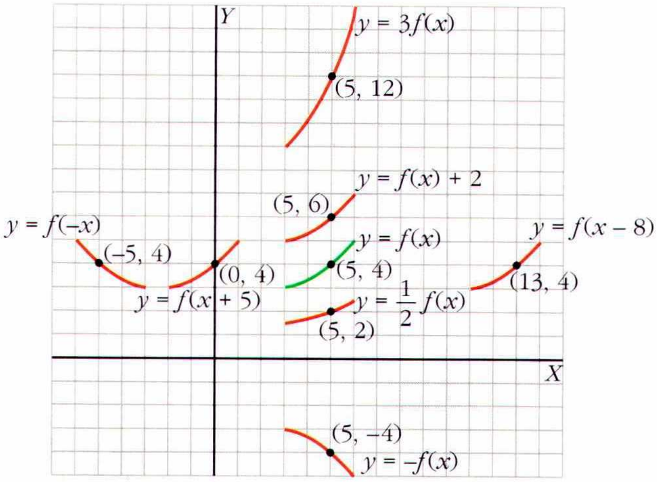
6. Representa $y = -3\sqrt{x}$. A partir de esta gráfica, representa estas otras:

a) $y = -3\sqrt{x + 5}$ b) $y = -3\sqrt{x - 4}$

c) $y = -3\sqrt{-x}$ d) $y = -3\sqrt{-(x - 2)}$

Resumen

FUNCIÓN	UN PUNTO
$y = f(x)$	(x_0, y_0)
$y = f(x) + k$	$(x_0, y_0 + k)$
$y = -f(x)$	$(x_0, -y_0)$
$y = kf(x)$	$(x_0, k \cdot y_0)$
$y = f(x - a)$	$(x_0 + a, y_0)$
$y = f(x + a)$	$(x_0 - a, y_0)$
$y = f(-x)$	$(-x_0, y_0)$

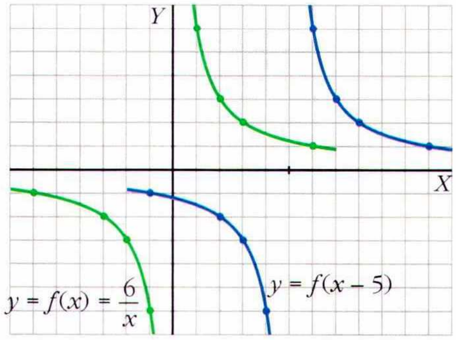


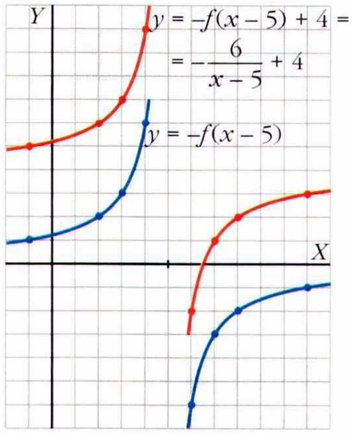
EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Representar:*

$$y = -\frac{6}{x-5} + 4$$

Representamos $y = \dfrac{6}{x} \to y = \dfrac{6}{x-5} \to y = -\dfrac{6}{x-5} \to y = -\dfrac{6}{x-5} + 4$





2. *Representar:*

$$y = -2\sqrt{-x-6}$$

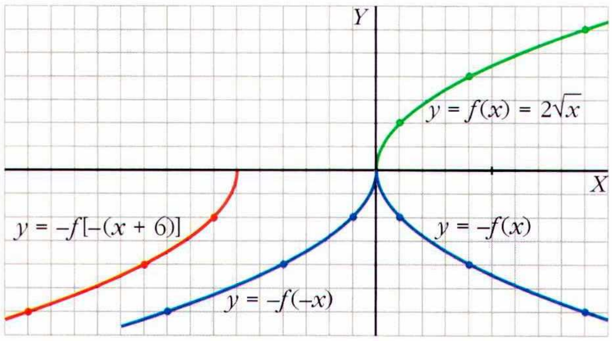
Representamos:

$y = 2\sqrt{x} \to$

$\to y = -2\sqrt{x} \to$

$\to y = -2\sqrt{-x} \to$

$\to y = -2\sqrt{-(x+6)}$



EJERCICIOS PROPUESTOS

7. Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:

$y = f(x) - 6$, $y = f(x + 4)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$, $y = 2f(x)$,

$y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -2f(-x) + 3$

8. Representa:

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$

b) $y = 3\sqrt{-x + 10}$

10.7 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Veamos, con unos ejemplos, cómo a partir de dos funciones se obtiene otra, llamada **función compuesta** de ambas.

OBSERVA

x	$\xrightarrow{\sqrt{\blacksquare}}$	$\sqrt{x}$	$\xrightarrow{1/\blacksquare}$	$1/\sqrt{\blacksquare}$
16	$\to$	4	$\to$	1/4
1	$\to$	1	$\to$	1
100	$\to$	10	$\to$	0,1
0,0001	$\to$	0,01	$\to$	100

- Observa la siguiente secuencia:

$$16 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{16} = 4 \xrightarrow{1/x} \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

Si ahora actuamos sobre una variable, x, obtenemos la función $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$:

$$x \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{x} \xrightarrow{1/x} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Pongamos nombres a las funciones utilizadas:

$$\sqrt{x} = r(x) \qquad \frac{1}{x} = v(x)$$

La función resultante se llama **función compuesta** de r y v y se designa $v \circ r$:

$$v \circ r(x) = v[r(x)] \to v \circ r(16) = v[r(16)] = v\left(\sqrt{16}\right) = v(4) = \frac{1}{4}$$

OBSERVA

x	$\xrightarrow{\blacksquare^2 - 5\blacksquare}$	$x^2 - 5x$	$\xrightarrow{\sqrt{\blacksquare}}$	$\sqrt{x^2 - 5x}$
9	$\to$	36	$\to$	6
−3	$\to$	24	$\to$	$\sqrt{24}$
0	$\to$	0	$\to$	0
−0,1	$\to$	0,51	$\to$	$\sqrt{0,51}$

- Otro ejemplo: $f(x) = x^2 - 5x \qquad r(x) = \sqrt{x}$

$$x \xrightarrow{f} x^2 - 5x \xrightarrow{r} \sqrt{x^2 - 5x}$$

$$r \circ f(x) = r[f(x)] = \sqrt{x^2 - 5x}$$

$$r \circ f(9) = r[81 - 45] = r(36) = \sqrt{36} = 6$$

- Observa que, en general, no es lo mismo componer dos funciones en un sentido que en sentido contrario:

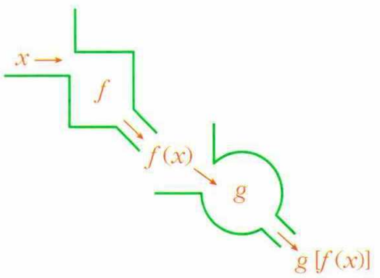
$$x \xrightarrow{r} \sqrt{x} \xrightarrow{f} \left(\sqrt{x}\right)^2 - 5 \cdot \sqrt{x} = x - 5\sqrt{x}$$

$$f \circ r(x) = f[r(x)] = x - 5\sqrt{x} \neq r \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$$

$$f \circ r(9) = f\left[\sqrt{9}\right] = f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = -6 \neq r \circ f(9) = 6$$

TEN EN CUENTA

En general, no es lo mismo $f \circ r(x)$ que $r \circ f(x)$.



Dadas dos funciones, f y g, se llama **función compuesta** de f y g, y se designa por $g \circ f$, a la función que transforma x en $g[f(x)]$:

$$x \xrightarrow{g \circ f} g[f(x)] \qquad x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

La expresión $g \circ f(x)$ se lee *f compuesta con g*. Se nombra en primer lugar la función de la derecha porque es la primera en actuar sobre la x.

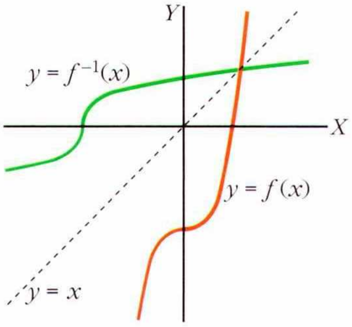
En general, la función $f[g(x)]$ es distinta de $g[f(x)]$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

2. Si $f(x) = sen\, x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.

10.8 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA



Vamos a componer las funciones $f(x) = x^3 - 6$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 6}$:

$$x \xrightarrow{f} x^3 - 6 \xrightarrow{f^{-1}} \sqrt[3]{(x^3 - 6) + 6} = \sqrt[3]{x^3} = x: \qquad f^{-1}[f(x)] = x$$

$$x \xrightarrow{f^{-1}} \sqrt[3]{x + 6} \xrightarrow{f} \left(\sqrt[3]{x + 6}\right)^3 - 6 = (x + 6) - 6 = x: \quad f[f^{-1}(x)] = x$$

Vemos que f y f^{-1} tienen la peculiaridad de que al actuar sucesivamente sobre un número x, el número se mantiene, es decir, cada una de esas funciones deshace lo que hace la otra. Por eso se dice que f^{-1} es la **inversa** de f, o que cada una de ellas es inversa de la otra.

Sus gráficas son simétricas respecto a $y = x$. Por tanto, se cortan en ella.

PUNTOS DE $f(x)$: $y = x^3 - 6$	(–1, –7)	(0, –6)	(2, 2)	…	(a, b)
PUNTOS DE $f^{-1}(x)$: $y = \sqrt[3]{x + 6}$	(–7, –1)	(–6, 0)	(2, 2)	…	(b, a)

CÓMO OBTENER f^{-1}

Para hallar la inversa de $y = f(x)$, se intercambian la x y la y, $x = f(y)$, y se despeja la y en la última expresión.

Por ejemplo: $f(x) = 5x - 7$

$y = 5x - 7 \rightarrow x = 5y - 7 \rightarrow$

$\rightarrow y = (x + 7)/5$

Se ha obtenido que $f^{-1}(x) = (x + 7)/5$.

Se llama **función inversa** o **recíproca** de f a otra función (se designa por f^{-1}) que cumple la siguiente condición:

Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$

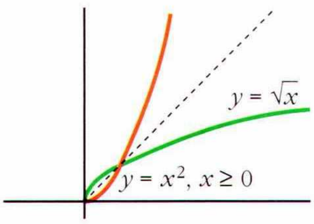
Como consecuencia, se dan las relaciones siguientes:

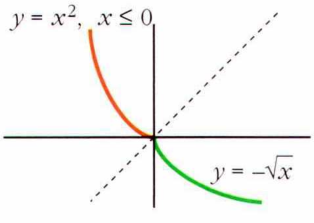
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x; \text{ es decir, } f^{-1}[f(x)] = x$$

$$x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) \xrightarrow{f} x; \text{ es decir, } f[f^{-1}(x)] = x$$

La función inversa de f^{-1} es, a su vez, f. Por eso se dice, simplemente, que las funciones f y f^{-1} son inversas o recíprocas.

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la recta $y = x$.





Para que una función tenga inversa ha de ser **inyectiva**, es decir, cada valor de y ha de corresponder a un único valor de x. Si no es así, ha de descomponerse en tramos en que sea inyectiva, cada uno de los cuales tendrá su función inversa.

Por ejemplo, como $y = x^2$ no es inyectiva, para hallar su inversa procedemos así:

$$y = f(x) = x^2 \begin{cases} y = f_1(x) = x^2, \ x \geq 0 \ \rightarrow \ f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ y = f_2(x) = x^2, \ x \leq 0 \ \rightarrow \ f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

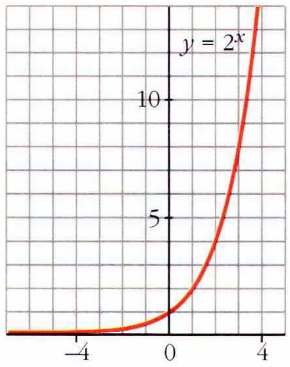
1. Representa $y = 2x$, $y = x/2$ y comprueba que son inversas.

2. Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas respecto de la recta $y = x$. Averigua cuáles son.

3. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, comprueba que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones inversas? Comprueba que el punto $(a, a + 1)$ está en la gráfica de f y que el punto $(a + 1, a)$ está en la gráfica de g. Representa las dos funciones y observa su simetría respecto de la recta $y = x$.

10.9 FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial de base 2: $y = 2^x$

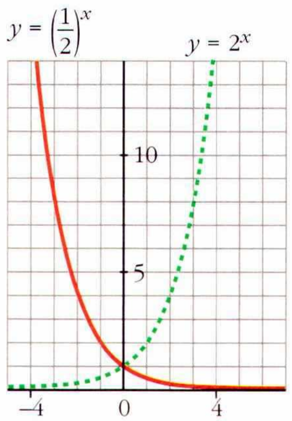


Esta es la gráfica de la función $y = 2^x$. Se trata de una función definida en todo $\mathbb{R}$, continua y creciente.

Crece más deprisa que cualquier función potencia. Por ejemplo, aunque la función $y = x^{10}$ al principio es mayor que $y = 2^x$, esta "la supera" para valores suficientemente grandes de x.

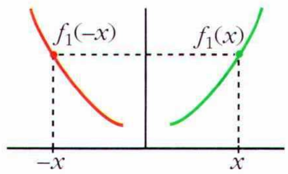
x	2	4	10	40	60	…
$\mathbf{x^{10}}$	1 024	1 048 576	10 000 000 000	$1{,}049 \cdot 10^{16}$	$6{,}05 \cdot 10^{17}$	…
$\mathbf{2^x}$	4	16	1 024	$1{,}1 \cdot 10^{12}$	$1{,}15 \cdot 10^{18}$	…

La función exponencial de base 1/2: $y = (1/2)^x$



La gráfica de la función $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ es simétrica, respecto del eje Y, de la de $y = 2^x$. La razón de esto es la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} y &= f_1(x) = 2^x \\ y &= f_2(x) = (1/2)^x = 2^{-x} \end{aligned}\right\} f_1(-x) = f_2(x)$$



Como consecuencia de la propiedad anterior, la función $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ es también continua en todo $\mathbb{R}$, pero decreciente.

Características de las funciones exponenciales

Se llaman **funciones exponenciales** las que tienen la ecuación $y = a^x$, siendo la base a un número positivo distinto de 1.

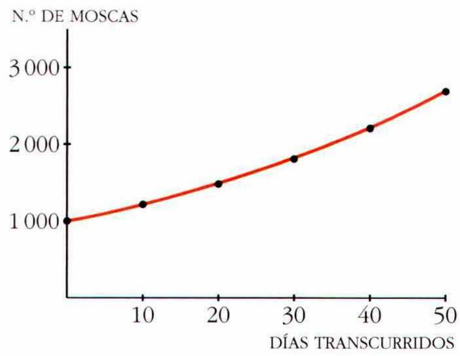
- Todas ellas son continuas en $\mathbb{R}$, y pasan por $(0, 1)$ y $(1, a)$.
- Si $a > 1$, son crecientes, tanto más cuanto mayor sea a. El crecimiento de cualquiera de ellas llega a ser muy rápido, superando incluso a cualquier función potencia. Por eso la expresión *crecimiento exponencial* es sinónimo de crecimiento muy rápido.
- Si $0 < a < 1$, son decrecientes.
- En matemáticas superiores la función $y = e^x$ es extraordinariamente importante. Tanto es así que cuando se habla de "la función exponencial", sin mencionar cuál es su base, se está haciendo referencia a ella.
- También son exponenciales las funciones $y = a^{kx}$, pues $a^{kx} = (a^k)^x$. Es decir, $y = a^{kx}$ es una función exponencial de base a^k.
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas, $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$, con las que se obtienen valores de las funciones $y = 10^x$ e $y = e^x$, respectivamente.

RECUERDA

El número e es un número irracional cuyo valor es

$e = 2{,}7182818\ldots$

Fenómenos que se describen mediante la función exponencial



La función exponencial se presenta en multitud de fenómenos de crecimiento animal, vegetal, económico, etc. En todos ellos, la variable independiente es el tiempo. Veamos algunos ejemplos:

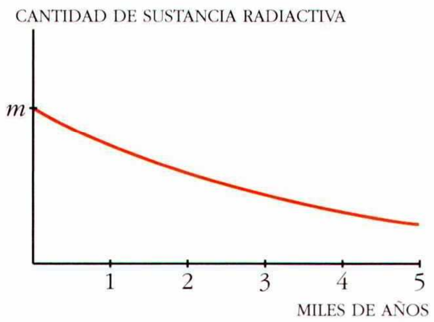
- En un lugar aislado se introducen 1 000 moscas de una cierta especie. La población (N = n.° de moscas) varía a lo largo del tiempo t (expresado en días) según la siguiente función:

$$N = 1\,000 \cdot 1{,}02^t$$

- Un capital de 50 000 € impuesto al 6% anual se transforma en un capital C al cabo de t años del siguiente modo:

$$C = 50\,000 \cdot 1{,}06^t$$

La función exponencial también sirve para describir fenómenos de decrecimiento. Por ejemplo:



- Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo y la cantidad de sustancia radiactiva disminuye de forma exponencial. En unas, la desintegración es rapidísima, en otras, muy lenta. Por ejemplo, una cierta cantidad de masa de una sustancia se desintegra según la ecuación:

$M = m \cdot 0{,}76^t$ (t = miles de años, m = cantidad inicial de sustancia radiactiva, M = cantidad de sustancia radiactiva al cabo de t años)

- También un capital puede decrecer. Por ejemplo: 80 000 € depositados en divisas se devalúan un 3,5% al año. Su evolución con el tiempo se describe mediante la función:

$$C = 80\,000 \cdot \left(\frac{100 - 3{,}5}{100}\right)^t = 80\,000 \cdot 0{,}965^t$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La masa de madera de un bosque aumenta en un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (*biomasa*) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo 100 años, la función $M = 1{,}4^t$ nos da la cantidad de masa vegetal, M, en un instante cualquiera, t expresado en siglos *a partir de 1800* (razona por qué).

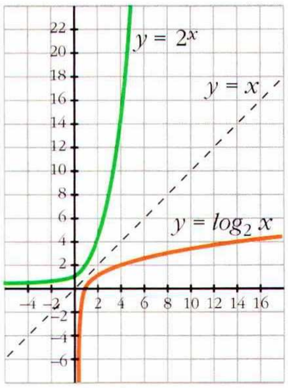
a) Averigua cuándo habrá una masa de madera triple que en 1800 ($1{,}4^t = 3$) y cuándo había la tercera parte. Observa que los dos periodos de tiempo son iguales.

b) Calcula la cantidad de madera que habrá, o había, en 1900, 1990, 2000, 1600 y 1550.

2. Comprueba que, en el ejemplo anterior referente a la desintegración de una cierta sustancia radiactiva, $M = m \cdot 0{,}76^t$ (t expresado en miles de años), el *periodo de semidesintegración* (tiempo que tarda en reducirse a la mitad la sustancia radiactiva) es de, aproximadamente, 2 500 años.

Para ello, comprueba que una cantidad inicial cualquiera se reduce a la mitad (aproximadamente) al cabo de 2 500 años ($t = 2{,}5$).

10.10 FUNCIONES LOGARÍTMICAS



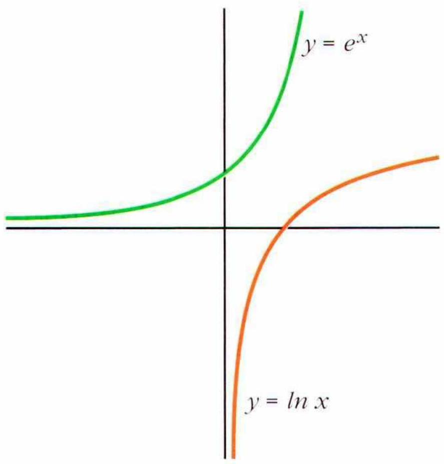
La función inversa de $y = 2^x$ se llama función logarítmica de base 2 y se designa así: $y = log_2 x$. Los valores que toma esta función son, obviamente, los de los logaritmos en base 2.

La gráfica de $y = log_2 x$ es simétrica respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de $y = 2^x$, por ser su función inversa.

Su crecimiento es más lento que el de cualquier función raíz. Por ejemplo, para valores muy grandes de x, $y = log_2 x$ es menor que $y = \sqrt[10]{x}$.

x	8	64	10^{10}	10^{15}	10^{20}	10^{100}	…
$\sqrt[10]{x}$	1,23	1,516	10	31,62	100	10^{10} = 10 000 000 000	…
$log_2 x$	3	6	33,219	49,83	66,43	332,19	…

Características de las funciones logarítmicas



Las funciones $y = e^x$, $y = ln\ x$, simétricas respecto de la recta $y = x$, son de gran importancia en matemáticas superiores.

Se llaman **funciones logarítmicas** las que tienen la ecuación $y = log_a x$, siendo a un número positivo distinto de 1.

- Todas ellas son continuas en $(0, +\infty)$ y pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.
- Si $a > 1$, son crecientes. Su crecimiento es muy lento, tanto más cuanto mayor sea a. Para valores muy grandes de x llegan a tomar valores mucho menores que los de cualquier función raíz, $y = \sqrt[n]{x}$, por grande que sea n.
- Si $0 < a < 1$, son decrecientes.
- En matemáticas superiores la función $y = log_e x$ es muy importante. Se le llama **logaritmo neperiano** y se designa $y = ln\ x$ o $y = Lx$. Es la función inversa de la exponencial de base e.
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas, log y ln, con las que se obtienen valores de las funciones $y = log_{10} x$ e $y = ln\ x$, respectivamente.

La función logarítmica como modelo

En psicología tiene gran importancia el estudio de percepciones. El individuo percibe la luz, los colores, sonidos, olores, sabores… La percepción depende (*es función*) de los estímulos físicos. Por ejemplo, hablemos de la iluminación (I), que puede ser medida físicamente, y la percepción, S, que aprecia un individuo. La relación entre las dos variables viene dada por la llamada *ley psicofísica* o ley de Weber-Fechner:

$$S = C\ log_{10} I \qquad (C \text{ es una constante})$$

Para valores pequeños de I el individuo aprecia pequeños cambios. Pero cuanto mayor sea I mayores tienen que ser los cambios para que se aprecien.

10.11 FUNCIONES ARCO

Vamos a definir las inversas de las funciones trigonométricas $y = sen\ x$, $y = cos\ x$, $y = tg\ x$, que se estudiaron en la unidad 5.

La función arco seno

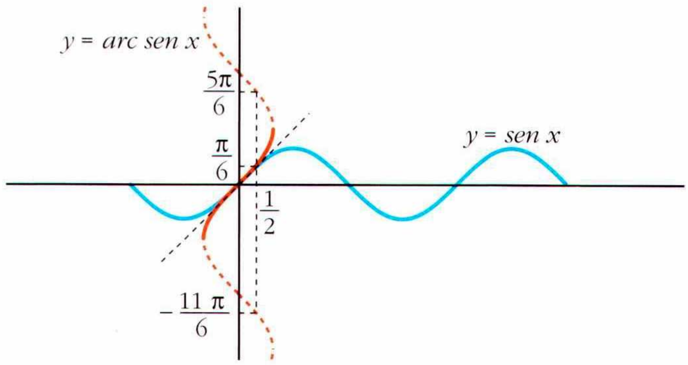
¿Cuál es el ángulo cuyo seno vale 1/2?

La respuesta puede ser 30° o bien $\frac{\pi}{6}$ rad. Esto se expresa así:

$$arc\ sen\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\ \left(\text{el arco cuyo seno es } \frac{1}{2} \text{ mide } \frac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$$

Vamos a estudiar las características de la función *arc sen* (arco seno).

La función *arc sen* es la inversa (recíproca) de la función *sen*.

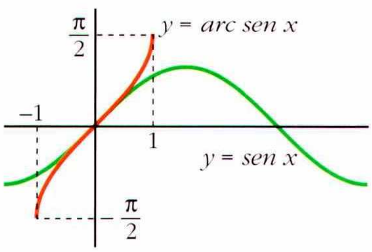


Su gráfica, que es la que está en rojo, es la simétrica de la gráfica de $y = sen\ x$ respecto de la recta $y = x$. Sin embargo, dicha gráfica no corresponde a una función, pues a cada valor de x le corresponden muchos (infinitos) valores de y.

Por ejemplo, para $x = \frac{1}{2}$, puede valer: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \dots, -\frac{11\pi}{6}, \dots$

Para que *arc sen* sea una función, hemos de quedarnos con un trozo de gráfica que sea inyectiva, es decir, que a cada valor de x le corresponda un único valor de y. Cualquiera de los infinitos tramos podría servir, pero se acostumbra a seleccionar el que aparece dibujado en trazo continuo en la gráfica anterior. Estos son los valores con los que trabaja la calculadora cuando utilizamos la función *arc sen* (SHIFT sin^{-1}).

En definitiva, definimos la función *arc sen* del siguiente modo:



arc sen es una función definida en [–1, 1] y que toma valores en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que:

$$arc\ sen\ a = b \Leftrightarrow sen\ b = a$$

Es una función creciente.

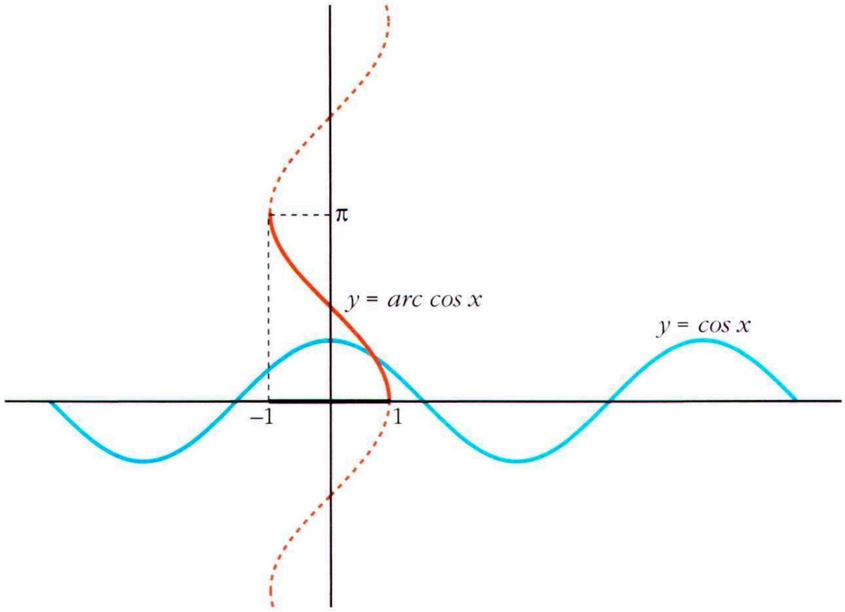
Verifica que:

$$sen\,(arc\ sen\ x) = x \qquad arc\ sen\,(sen\ x) = x$$

En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (1) y con **CALCULADORA GRÁFICA** (2) algunos aspectos de esta unidad.

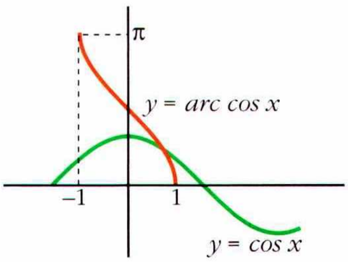
La función arco coseno

De forma análoga a como se hacía con *arc sen*, la función **arco coseno** (*arc cos*) se define como función recíproca de la función coseno.



Hemos de quedarnos con uno de los tramos para que sea una función. Se suele elegir el que en la gráfica aparece en trazo continuo. Sus valores son los que da la calculadora cuando utilizamos la función arco coseno (SHIFT $\cos^{-1}$).

Se define, pues, *arc cos* del siguiente modo:



arc cos es una función definida en [–1, 1] y que toma valores en [0, π], tal que:

$$arc\ cos\ a = b \Leftrightarrow cos\ b = a$$

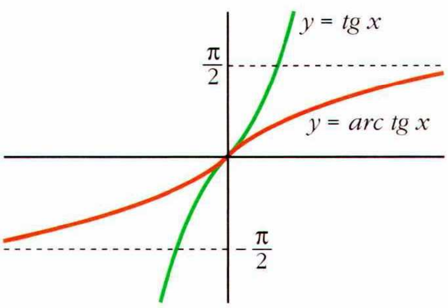
Es una función decreciente.

Verifica que:

$$cos(arc\ cos\ x) = x \qquad arc\ cos(cos\ x) = x$$

La función arco tangente

La función **arco tangente** (*arc tg*) se define análogamente:



arc tg es una función definida en $(-\infty, +\infty)$ que toma valores en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que:

$$arc\ tg\ a = b \Leftrightarrow tg\ b = a$$

Es una función creciente.

Verifica que:

$$tg(arc\ tg\ x) = x \qquad arc\ tg(tg\ x) = x$$

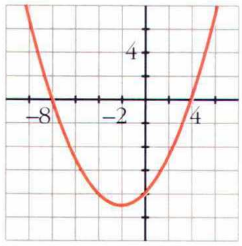
1 Parábolas

Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$

b) $y = -3x^2 + 6x + 3, \ x \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$

a) Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba por ser una función cuadrática con $a > 0$.



- Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -8$

$y = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 + x - 8 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -8 \end{cases}$

- Vértice:

$x = \frac{-b}{2a} = -2$

$y = \frac{1}{4}(-2)^2 - 2 - 8 = -9$

b) Parábola abierta hacia abajo $(a < 0)$.

- Puntos de corte con los ejes:

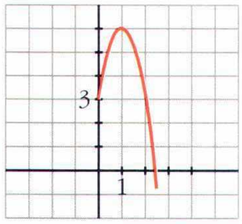
$x = 0 \rightarrow y = 3$

$y = 0 \rightarrow -3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \begin{cases} x \approx 2{,}4 \\ x \approx -0{,}4 \end{cases}$

- Vértice:

$x = \frac{-b}{2a} = 1$

$y = -3 + 6 + 3 = 6$



- Su dominio de definición está limitado al intervalo [0, 5/2]. Por ello, su gráfica va desde el punto (0, 3) al (5/2, –3/4).

2 Beneficios de una empresa

Los costes de producción (en euros) de una empresa vienen dados por:

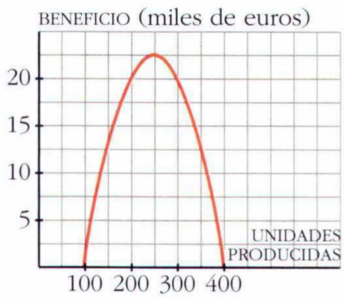
$$C = 40\,000 + 20q + q^2$$

(q: unidades producidas). El precio de venta de cada unidad es de 520 euros.

a) Expresa en función de q el beneficio de la empresa y represéntalo gráficamente.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) El beneficio se calcula restando los costes de producción, C, al dinero obtenido con las ventas, $520q$.



Beneficio:

$$B = 520q - 40\,000 - 20q - q^2 =$$
$$= -q^2 + 500q - 40\,000$$

Su representación gráfica es una parábola abierta hacia abajo.

- Puntos de corte con OX:

$B = 0 \rightarrow -q^2 + 500q - 40\,000 = 0 \begin{cases} q = 100 \\ q = 400 \end{cases}$

- Vértice: $\begin{cases} q = -500/-2 = 250 \\ B = -250^2 + 500 \cdot 250 - 40\,000 = 22\,500 \end{cases}$

b) El beneficio máximo es 22 500 € y se obtiene fabricando 250 unidades.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

3 Hipérbolas

Representa las hipérbolas siguientes:

a) $y = \dfrac{2}{x - 3}$

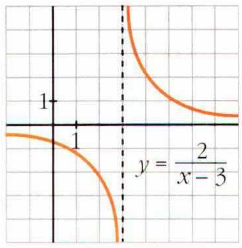
b) $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

c) $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$

a) La gráfica de $y = \dfrac{2}{x - 3}$ es como la de $y = \dfrac{2}{x}$ desplazada 3 unidades a la derecha, como se puede comprobar dando algunos valores:

$$f(1) = -1,\ f(2) = -2,\ f(4) = 2,\ f(5) = 1$$

Sus asíntotas son el eje X y la recta $x = 3$.

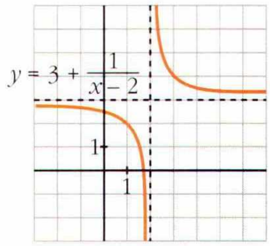


b) Vamos a escribir la función utilizando la relación:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

Efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} 3x - 5 & x - 2 \\ \hline -3x + 6 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \frac{3x - 5}{x - 2} = 3 + \frac{1}{x - 2}$$

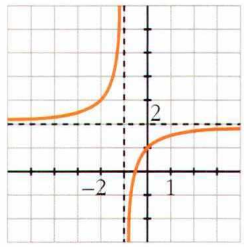


Por tanto, la gráfica de $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2} = 3 + \dfrac{1}{x - 2}$

es como la de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada 2 unidades a la derecha y 3 arriba.

c) Dividimos:

$$\begin{array}{r|l} 2x + 1 & x + 1 \\ \hline -2x - 2 & 2 \\ \hline -1 & \end{array} \qquad \frac{2x + 1}{x + 1} = 2 + \frac{-1}{x + 1}$$



La gráfica de $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ es la simétrica de $\dfrac{1}{x}$ respecto al eje X, desplazada 2 unidades hacia arriba y 1 hacia la izquierda.

4 Función definida "a trozos"

La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

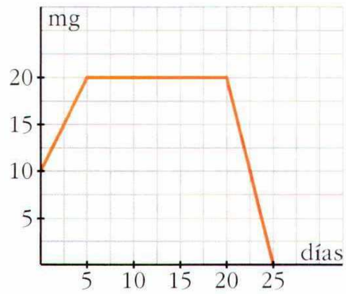
a) • Ecuación del primer tramo de recta que pasa por (0, 10) y (5, 20):

$$y = 10 + 2x$$

• El segundo tramo es constante:

$$y = 20$$

• Tercer tramo: recta que pasa por (20, 20) y (25, 0):



$$m = \frac{0 - 20}{25 - 20} = -4 \ \rightarrow\ y = 0 - 4(x - 25) \ \rightarrow\ y = -4x + 100$$

Expresión analítica: $f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si} \quad 0 \le x < 5 \\ 20 & \text{si} \quad 5 \le x < 20 \\ 100 - 4x & \text{si} \quad 20 \le x \le 25 \end{cases}$

b) Dominio de definición: [0, 25]. Recorrido: [0, 20]

5 Valor absoluto de una función

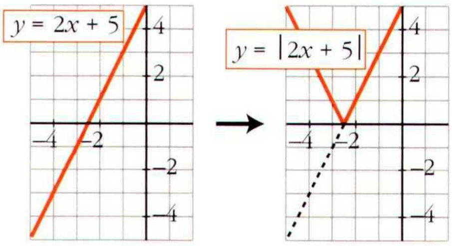
Representa gráficamente las siguientes funciones y defínelas como funciones "a trozos".

a) $y = |2x + 5|$

b) $y = |4 - x^2|$

a) La recta $y = 2x + 5$ corta al eje X en $2x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$.

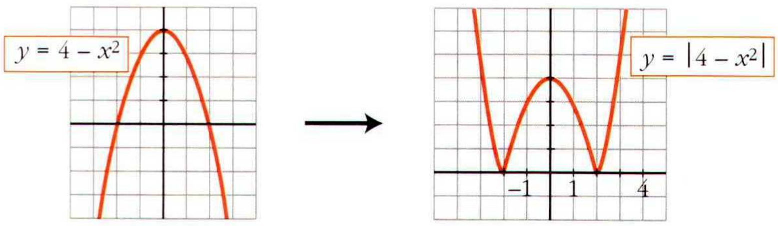
Para valores menores que $-\frac{5}{2}$, la gráfica sube sobre el eje X.



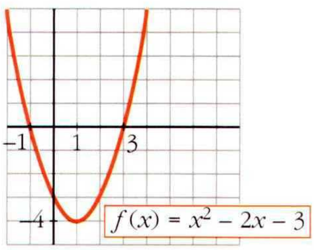
$$y = |2x + 5| = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x < -5/2 \\ 2x + 5 & \text{si } x \geq -5/2 \end{cases}$$

b) La parábola $y = 4 - x^2$ corta al eje X en $4 - x^2 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

$$y = |4 - x^2| = \begin{cases} -4 + x^2 & \text{si } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -4 + x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



6 Transformaciones de una función



Esta es la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Representa, a partir de ella, las funciones:

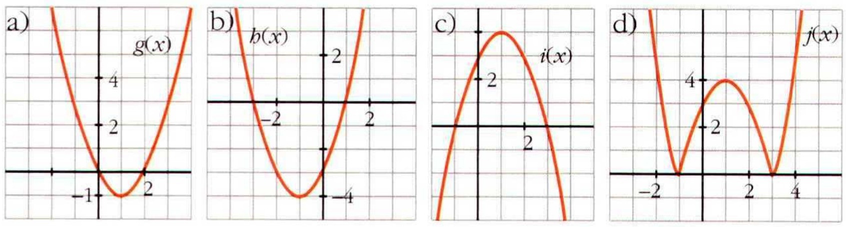
a) $g(x) = f(x) + 3$

b) $h(x) = f(x + 2)$

c) $i(x) = -f(x)$

d) $j(x) = |f(x)|$

Sus gráficas son estas:



Puedes comprobarlo con su expresión analítica:

a) $g(x) = x^2 - 2x$

b) $h(x) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) - 3 = x^2 + 2x - 3$

c) $i(x) = -x^2 + 2x + 3$

d) $j(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty) \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \in (-1, 3) \end{cases}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

7 Composición

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{3x-6}$$

$$g(x) = 2 + \sqrt{x}$$

halla:

a) $f \circ g$ ***b)*** g^{-1}

c) $g^{-1} \circ g$ ***d)*** $g \circ g$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2 + \sqrt{x}) = \dfrac{1}{3(2+\sqrt{x}) - 6} = \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

b) $y = 2 + \sqrt{x} \xrightarrow{\text{cambia } x \text{ por } y} x = 2 + \sqrt{y} \xrightarrow{\text{despeja la } y} x - 2 = \sqrt{y} \rightarrow$

$\rightarrow y = (x-2)^2;\quad g^{-1}(x) = (x-2)^2$, para $x \geq 2$

c) $(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}[g(x)] = g^{-1}(2 + \sqrt{x}) = (2 + \sqrt{x} - 2)^2 = x$

d) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g(2 + \sqrt{x}) = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}$

8 Función inversa

Halla la función inversa de $y = 2^{x+1}$.

Cambiamos las variables y despejamos la y:

$$y = 2^{x+1} \rightarrow x = 2^{y+1} \rightarrow \log_2 x = y + 1 \rightarrow y = -1 + \log_2 x$$

Comprobamos que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$:

$$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(2^{x+1}) = -1 + \log_2 2^{x+1} = -1 + x + 1 = x$$

9 Decrecimiento exponencial

Una taza de café recién hecho está a 75 °C. Después de 3 minutos en una habitación a 21 °C, la temperatura del café ha descendido a 64 °C. Si la temperatura, T, del café en cada instante t viene dada por la expresión $T = A\,e^{kt} + 21$, calcula A y k y representa la función.

¿Cuánto tendremos que esperar para que la temperatura del café sea 45 °C?

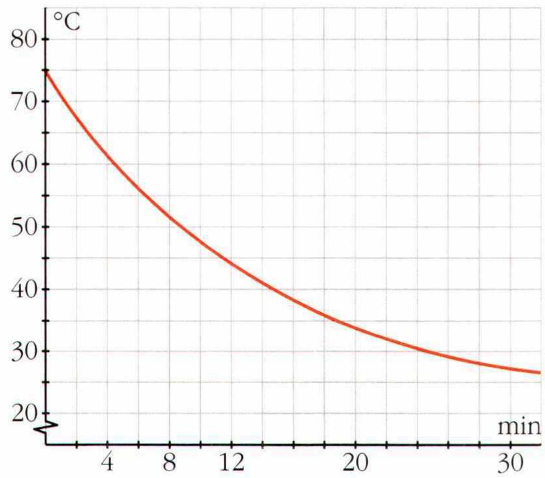
Conocemos dos puntos de la función (0, 75) y (3, 64).

$t = 0 \rightarrow 75 = A \cdot e^0 + 21 \rightarrow A = 54$

$t = 3 \rightarrow 64 = 54 \cdot e^{3k} + 21 \rightarrow e^{3k} \approx 0{,}796 \rightarrow$

$\rightarrow 3k = \ln 0{,}796 \rightarrow k \approx -0{,}076$

Por tanto, $T = 54\,e^{-0{,}076t} + 21 \rightarrow T = 54 \cdot 0{,}93^t + 21$



Si queremos que $T = 45$:

$45 = 54 \cdot 0{,}93^t + 21 \rightarrow 0{,}93^t = 0{,}\widehat{4} \rightarrow t = \dfrac{\ln 0{,}\widehat{4}}{\ln 0{,}93} = 11{,}17$

Tendremos que esperar 11 minutos aproximadamente.

PARA PRACTICAR

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ f) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

2 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{3 - x}$ b) $y = \sqrt{2x - 1}$

c) $y = \sqrt{-x - 2}$ d) $y = \sqrt{-3x}$

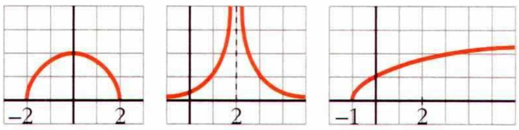
3 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ b) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

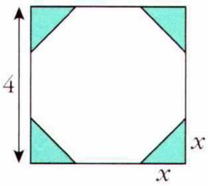
c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$ f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

4 Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:



5 De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.



a) Escribe el área del octógono que resulta en función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?

6 Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones x, $x/2$ y $2x$ cm.

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de x.

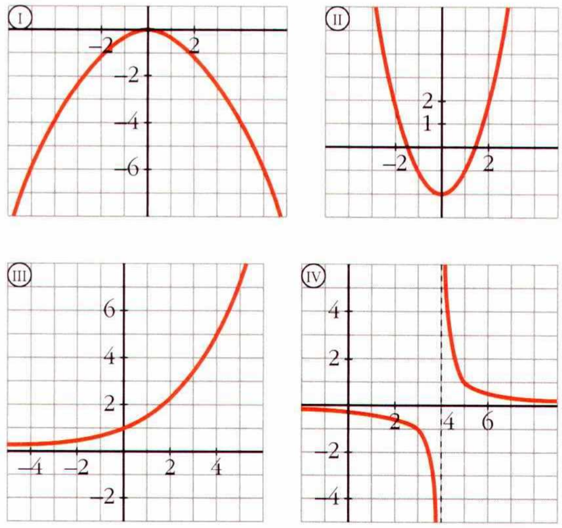
b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 *l* de volumen. ¿Cuál es su recorrido?

Gráfica y expresión analítica

7 Asocia a cada una de las gráficas su expresión analítica.

a) $y = 1{,}5^x$ b) $y = x^2 - 2$

c) $y = -0{,}25x^2$ d) $y = \dfrac{1}{x-4}$



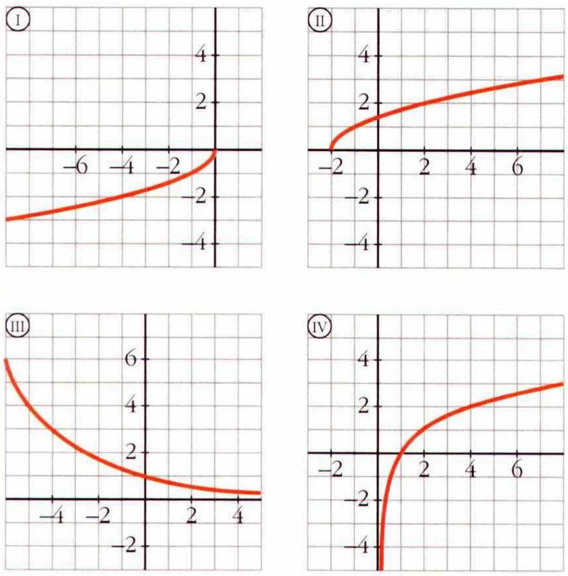
8 Asocia a cada gráfica la expresión analítica que le corresponda entre las siguientes:

a) $y = \sqrt{x + 2}$

b) $y = 0{,}75^x$

c) $y = log_2\, x$

d) $y = -\sqrt{-x}$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Representación de funciones elementales

9 Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:

a) $y = x^2 + 2x + 1$ b) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

c) $y = -x^2 + 3x - 5$ d) $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

10 Representa las siguientes funciones en el intervalo indicado:

a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$ b) $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \geq -1$

11 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

12 Representa:

a) $y = \begin{cases} (x/2) + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - (3/2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} (2x + 2)/3 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

13 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{1}{x - 1}$

c) $y = \dfrac{-1}{x}$ d) $y = \dfrac{-1}{x - 3}$

14 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x - 1}$ b) $y = -\sqrt{x + 3}$

c) $y = 2 + \sqrt{x}$ d) $y = 1 - \sqrt{x}$

15 Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa su función inversa $y = log_3 x$.

16 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 0{,}6^x$ b) $y = 1{,}2^x$

Composición y función inversa

17 Considera las funciones f y g definidas por las expresiones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$

c) $(g \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$

18 Dadas las funciones $f(x) = cos\, x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$

19 Halla la función inversa de estas funciones:

a) $y = 3x$ b) $y = x + 7$ c) $y = 3x - 2$

20 Representa la gráfica de $y = log_{1/3}\, x$ a partir de la gráfica de $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

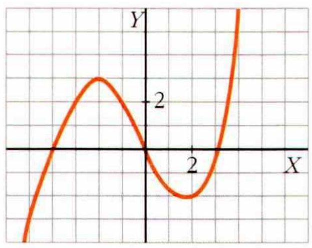
21 Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY.

Transformaciones en una función

22 Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:

a) $g(x) = f(x) - 3$ b) $h(x) = f(x + 2)$

23 Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:



Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ b) $y = f(x) + 2$

24 A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:

a) $g(x) = f(x) - 2$ b) $h(x) = f(x - 3)$

c) $i(x) = -f(x)$ d) $j(x) = |f(x)|$

25 Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:

a) $g(x) = f(x + 1)$ b) $h(x) = f(x) - 3$

26 Representa las funciones:

a) $y = 2^x + 1$ b) $y = 2^x - 3$

☛ *Utiliza la gráfica de $y = 2^x$.*

27 Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2^{x-1}$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

c) $y = 1 - 2^x$ d) $y = 2^{-x}$

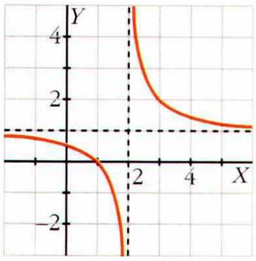
28 Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = log_2\, x$:

a) $y = 1 + log_2\, x$ b) $y = log_2\, (x - 1)$

c) $y = -log_2\, x$ d) $y = log_2\, (-x)$

29 La expresión analítica de esta función es del tipo $y = \frac{1}{x - a} + b$.

Observa la gráfica y di el valor de a y b.



Valor absoluto de una función

30 Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

31 Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:

a) $y = |4 - x|$ b) $y = |x - 3|$

32 Representa y define como funciones "a trozos":

a) $y = \left|\frac{x - 3}{2}\right|$ b) $y = |3x + 6|$

c) $y = \left|\frac{2x - 1}{3}\right|$ d) $y = |-x - 1|$

33 Representa la función: $y = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

¿Puedes definirla como valor absoluto?

34 Representa estas funciones:

a) $y = |x^2 - 1|$ b) $y = |x^2 - 4x|$

c) $y = |x^2 + 2x - 3|$ d) $y = |x^2 - 2x + 1|$

☛ *Mira el ejercicio resuelto número 5.*

PARA RESOLVER

35 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

36 Utilizando la relación

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

podemos escribir la función $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$ de esta forma: $y = 2 + \frac{1}{x + 1}$. Comprueba que su gráfica coincide con la de $y = 1/x$ trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 hacia arriba.

37 Representa las siguientes funciones utilizando el procedimiento del problema anterior.

a) $y = \frac{3x}{x - 1}$ b) $y = \frac{x - 2}{x - 4}$

c) $y = \frac{3x + 2}{x + 1}$ d) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

38 Con las funciones:

$f(x) = x - 5$ $g(x) = \sqrt{x}$ $h(x) = \frac{1}{x + 2}$

hemos obtenido, por composición, estas otras:

$p(x) = \sqrt{x - 5}$; $q(x) = \sqrt{x} - 5$; $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$

Explica cómo, a partir de f, g y h, se pueden obtener p, q y r.

39 La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).

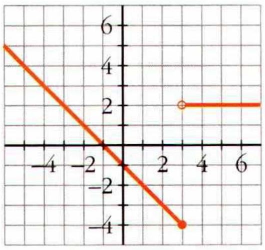
a) Calcula k y a. b) Representa la función.

40 Halla la función inversa de las siguientes funciones:

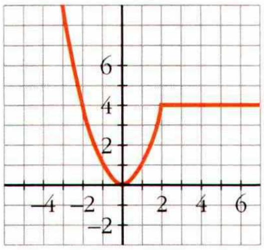
a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$ b) $y = 1 + 3^x$

41 Busca la expresión analítica de estas funciones:

a)



b)



42 Utiliza la calculadora en radianes para obtener el valor de y en cada una de estas expresiones:

a) $y = arc\ sen\ 0{,}8$ b) $y = arc\ sen\ (-0{,}9)$

c) $y = arc\ cos\ 0{,}36$ d) $y = arc\ cos\ (-0{,}75)$

e) $y = arc\ tg\ 3{,}5$ f) $y = arc\ tg\ (-7)$

43 Obtén el valor de estas expresiones en grados, sin usar la calculadora:

a) $y = arc\ sen\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $y = arc\ cos\ \dfrac{1}{2}$

c) $y = arc\ tg\ 1$ d) $y = arc\ sen\ (-1)$

e) $y = arc\ cos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ f) $y = arc\ tg\ \sqrt{3}$

44 La factura del gas de una familia, en septiembre, ha sido de 24,82 euros por 12 m^3, y en octubre, de 43,81 por 42 m^3.

a) Escribe la función que da el importe de la factura según los m^3 consumidos y represéntala.

b) ¿Cuánto pagarán si consumen 28 m^3?

45 Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima? Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

46 Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].

b) Halla la altura del edificio.

c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

47 La dosis de un medicamento es 0,25 g por cada kilo de peso del paciente, hasta un máximo de 15 g. Representa la función *peso del paciente-cantidad de medicamento* y halla su expresión analítica.

48 El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - (x/4)$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

☛ *Los ingresos por la venta de x unidades son $x(50 - (x/4))$ euros.*

49 Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

50 Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.

a) Representa la función *tiempo-distancia*.

b) Busca su expresión analítica.

51 Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ka^t$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?

52 Un negocio en el que invertimos 10 000 €, pierde un 4% mensual. Escribe la función que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos, y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?

CUESTIONES TEÓRICAS

53 Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = log_2\, x$, ¿cuál es la función $(f \circ g)(x)$? ¿Y $(g \circ f)(x)$?

54 Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del 1.er cuadrante.

55 Dada la función $y = a^x$, contesta:

a) ¿Puede ser negativa la y? ¿Y la x?

b) ¿Para qué valores de a es creciente?

c) ¿Cuál es el punto por el que pasan todas las funciones del tipo $y = a^x$?

d) ¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$ siendo $a > 1$?

56 Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $arc\ sen\ x = 45°$ b) $arc\ cos\ x = 30°$

c) $arc\ tg\ x = -72°$ d) $arc\ sen\ x = 75°$

e) $arc\ cos\ x = \dfrac{\pi}{3}$ rad f) $arc\ tg\ x = 1{,}5$ rad

PARA PROFUNDIZAR

57 Una parábola corta al eje de abscisas en $x = 1$ y en $x = 3$. La ordenada del vértice es $y = -4$. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?

58 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

59 Representa y expresa en intervalos las funciones:

a) $y = 1 - |x|$ b) $y = |x-1| - |x|$

60 Las tarifas de una empresa de transportes son:

- 40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.
- Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t).

b) Obtén la expresión analítica.

AUTOEVALUACIÓN

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ b) $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

2. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |2x + 3|$ b) $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3. Representa $y = \dfrac{1}{x}$. A partir de ella, dibuja la gráfica de $y = \dfrac{-2x+5}{x-2}$.

4. Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente.

a) Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

5. El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

b) Representa la función *nº de artículos-ingresos.*

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

6. Depositamos en un banco 5 000 € al 6% anual.

a) Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es?

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

7. Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, halla:

a) $f[g(2)]$ b) $g[f(15)]$ c) $f \circ g$ d) $g \circ f$

3. En tu CD puedes encontrar las resoluciones de todos estos ejercicios.